УДК 62-50

**В. Н. Ушаков, В. Ю. Пахотинских**

# АППРОКСИМАЦИЯ СТАБИЛЬНЫХ МОСТОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ФАЗОВЫЙ ВЕКТОР*

## Введение

Рассматривается дифференциальная игра сближения-уклонения на конечном промежутке времени [1]. Предполагается, что позиции игры стеснены некоторым ограничением, представляющим собой замкнутое множество в пространстве позиций. В рассматриваемой игре первому игроку требуется обеспечить попадание фазовой точки на терминальное множество в конечный момент времени, а второму – обеспечить уклонение от терминального множества в этот момент [1]. Предлагается метод приближенного построения множества позиционного поглощения – множества всех позиций, принадлежащих ограничению, из которых разрешима задача о сближении, стоящая перед первым игроком. Выписаны соотношения, определяющие систему множеств, аппроксимирующую множество позиционного поглощения. Основной результат работы заключается в обосновании сходимости аппроксимационной системы множеств к множеству позиционного поглощения. Работа примыкает к [1–15].

## 1. Постановка задачи

Пусть задана конфликтно-управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 \leqslant \vartheta < \infty)$ описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0, \ u \in P, \ v \in Q. \tag{1.1}$$

Здесь $x$ – $m$-мерный фазовый вектор из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $u$ – управление первого игрока, $v$ – управление второго игрока, $P$ и $Q$ – компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагается, что выполнены условия:

A. Ограниченная и замкнутая область $\Phi$ переменных $t, x$ $(t \in [t_0, \vartheta],\ x \in \mathbb{R}^m)$ такова, что $\Phi(\vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^m : (\vartheta, x) \in \Phi\} \neq \varnothing$.

---

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №02-01-96424, 02-01-00769.

B. Вектор-функция $f(t, x, u, v)$ определена и непрерывна по совокупности $(t, x, u, v)$ на множестве $I \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$ ($I$ – отрезок времени, содержащий внутри себя $[t_0, \vartheta]$) и удовлетворяет условию локальной липшицевости по $x$: для любого компакта $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ найдется $L = L(D) \in (0, \infty)$ такое, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \leqslant \|x^{(1)} - x^{(2)}\| \tag{1.2}$$

при любых $(t, x^{(i)}, u, v)$, $i = 1, 2$, из $D \times P \times Q$.

Здесь $\|\cdot\|$ – норма вектора в соответствующем евклидовом пространстве.

C. Существует такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \gamma(1 + \|x\|) \tag{1.3}$$

при любых $(t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$.

Дифференциальная игра, рассматриваемая здесь, складывается из задачи о сближении и задачи об уклонении [1]. В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется найти позиционную стратегию $U^*(t, x)$ первого игрока, которая обеспечивает попадание движения $x(t)$ системы 1.1 в момент $\vartheta$ на замкнутое множество $M$, содержащееся в $\Phi(\vartheta)$. При этом должно выполняться включение $(t, x(t)) \in \Phi$, $t \in [t_0, \vartheta]$. В задаче об уклонении, стоящей перед первым игроком, требуется построить контрстратегию $V^*(t, x, u)$ второго игрока, которая исключает встречу с $M$. Поскольку настоящая работа посвящена решению задачи о сближении, то мы здесь не детализируем постановку задачи об уклонении (см. [1, с. 49–50]).

В [1] показано, что для сформулированной дифференциальной игры справедлива альтернатива. А именно, существует такое замкнутое множество $W^0 \subset \Phi$, называемое множеством позиционного поглощения, что для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in W^0$ разрешима задача о сближении, а для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in \Phi \setminus W^0$ разрешима задача об уклонении. При этом установлено, что $W^0$ есть максимальный $u$-стабильный мост.

Множество $W^0$ допускает аналитическое описание лишь в редких случаях. Поэтому важным является вопрос о приближенном построении множества $W^0$, который и рассматривается в этой работе. С использованием попятных конструкций вводится система множеств, аппроксимирующая $W^0$ и отвечающая некоторой дискретизации промежутка $[t_0, \vartheta]$. Обосновывается сходимость аппроксимирующей системы множеств к $W^0$ при шаге дискретизации, стремящемся к нулю.

## 2. Оператор стабильного поглощения и стабильные мосты

Поскольку $W^0$ есть максимальный $u$-стабильный мост, согласно [1], то свойство стабильности является ключевым в выделении $W^0$ в $\Phi$. Стабильность множества $W$, содержащегося в $\Phi$, означает слабую инвариантность $W$ относительно некоторого семейства дифференциальных включений, связанных с системой 1.1 и рассматриваемых на $[t_0, \vartheta]$.

Введем в рассмотрение функцию (гамильтониан) системы (1.1)

$$H(t,x,l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, f(t,x,u,v) \rangle, \; l \in \mathbb{R}^m,$$

где $\langle l, f \rangle$ – скалярное произведение векторов $l$ и $f$ из $\mathbb{R}^m$.

Пусть $\Phi_\sigma$ $(\sigma > 0)$ – $\sigma$-окрестность множества $\Phi$ в пространстве переменных $t, x$ такая, что $\Phi_\sigma \subset I \times \mathbb{R}^m$.

Полагаем $G = \{f \in \mathbb{R}^m : \; \|f\| \leqslant K < \infty\}$ – такой шар в $\mathbb{R}^m$, что $F(t,x) = \text{co}\{f(t,x,u,v) : \; u \in P, v \in Q\} \subset G$ при любых $(t,x) \in \Phi_\sigma$; здесь $\text{co}\{f\}$ – выпуклая оболочка множества $f$.

Пусть задано некоторое множество $\Psi$ элементов $\psi$, а также семейство $\{F_\psi : \; \psi \in \Psi\}$ отображений $F_\psi$: $(t,x) \mapsto F_\psi(t,x), \; (t,x) \in \Phi_\sigma$, удовлетворяющее условиям:

A.1. Для любых $(t,x,\psi) \in \Phi_\sigma \times \Psi$ множество $F_\psi(t,x)$ выпукло, замкнуто в $\mathbb{R}^m$ и $F_\psi(t,x) \subset G$.

A.2. Для любых $(t,x,l) \in \Phi_\sigma \times S$ выполняется равенство

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t,x)}(l) = H(t,x,l).$$

A.3. Существует функция $\omega^*(\delta)$ $(\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0)$ такая, что

$$d(F_\psi(t_*,x_*), F_\psi(t^*,x^*)) \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|),$$
$$(t_*,x_*) \text{ и } (t^*,x^*) \text{ из } \Phi_\sigma, \psi \in \Psi.$$

Здесь $h_F(l) = \sup\limits_{f \in F} \langle l, f \rangle$ при $F \subset \mathbb{R}^m$; $S = \{l \in \mathbb{R}^m : \; \|l\| = 1\}$; $d(F_*, F^*)$ – хаусдорфово расстояние между множествами $F_*$ и $F^*$ в $\mathbb{R}^m$.

В качестве примеров семейств отображений, удовлетворяющих условиям A.1–A.3, укажем семейства $\{G_l : \; l \in S\}$ и $\{F_{v(\cdot)} : \; v(\cdot) \in V\}$ [1, 4, 5]; здесь $G_l(t,x) = \; \{f \in G : \; \langle l, f \rangle \leq H(t,x,l)\}$, $F_{v(\cdot)}(t,x) = \overline{\text{co}}\{f(t,x,u,v(u)) : \; u \in P\}$; $\overline{\text{co}}\{f\}$ – замкнутая выпуклая оболочка множества $\{f\}$; $V$ – совокупность всех отображений $v(\cdot) : \; P \mapsto Q$.

Отметим также, что для некоторых классов управляемых систем, в частности, для систем (1.1) с правой частью

$$f(t,x,u,v) = \phi(t,x) + B(t,x)u + C(t,x)v \tag{2.1}$$

и ограничениями $P$ и $Q$ – выпуклыми многогранниками с конечным числом вершин, можно ввести семейство отображений, удовлетворяющее условиям

А.1–А.3, которое соответствует конечному множеству $\Psi$. В качестве такого множества $\Psi$ можно взять набор всех вершин $v^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, J-1, J$ многогранника $Q$, а в качестве множеств $F_\psi(t,x)$ – множества

$$F_{v^{(j)}}(t,x) = \{f = \phi(t,x) + B(t,x)u + C(t,x)v^{(j)} : u \in P\},\ j = 1, 2, \ldots, J-1, J.$$

Такое задание семейства $\{F_{v^{(j)}},\ j = 1, 2, \ldots, J-1, J\}$, удовлетворяющего условиям А.1–А.3, позволяет эффективно осуществлять, по крайней мере для систем второго порядка, приближенное построение множества $W^0$.

Приведем определение оператора стабильного поглощения в рассматриваемой задаче о сближении. Введем обозначения: $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$ – множество всех $x^* \in \mathbb{R}^m$, в которые приходят в момент $t^* \in [t_*, \vartheta]$ решения $x(\cdot) = (x(t) :\ t_* \leqslant t \leqslant t^*)$ дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t,x)$, $x(t_*) = x_*$; $X_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X_\psi(t^*; t_*, x_*) \bigcap X^* \neq \varnothing\}$, $X^*$ – множество из $\mathbb{R}^m$.

**Определение 2.1.** *Оператором стабильного поглощения $\pi$ в задаче о сближении назовем отображение $(t_*, t^*, X^*) \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$, $(t_*, t^*, X^*) \in \Delta \times 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением*

$$\pi(t_*, t^*, X^*) = \Phi(t_*) \bigcap \Big( \bigcap_{\psi \in \Psi} X_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) \Big),$$

*здесь $\Delta = \{(t_*, t^*) :\ t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta\}$.*

**Определение 2.2.** *Замкнутое множество $W \subset \Phi$ назовем $u$-стабильным мостом в задаче о сближении, если $W(\vartheta) \subset M$, $W(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, W(t^*))$ для любых $(t_*, t^*) \in \Delta$. Здесь $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m :\ (t,x) \in W\}$.*

Свойство стабильности является центральным в теории позиционных дифференциальных игр. Приведенное здесь определение 2.2 является более поздним определением стабильности. Однако можно показать, что $u$-стабильные мосты $W$, выделяемые в $\Phi$ при помощи определения из [1], одни и те же. Это обстоятельство дает нам право использовать семейства $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$, удовлетворяющие А.1–А.3, для выделения в $\Phi$ максимального $u$-стабильного моста $W^0$ – множества позиционного поглощения [1]. Отметим, что при решении задачи о сближении на основании позиционного подхода основная тяжесть ложится на построение моста $W^0$. Известно, что описать точно мост $W^0$ при помощи аналитических соотношений можно лишь для некоторых специальных классов систем 1.1. В общем же случае приходится отказаться от точного выделения стабильного моста $W^0$. В связи с этим весьма актуальной является задача о приближенном построении $W^0$. Приближенному построению моста $W^0$ посвящен разд. 3.

## 3. Аппроксимирующая система множеств

Предполагаем, что семейство $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ удовлетворяет также условию А.4. Существует число $\lambda \in (0, \infty)$ такое, что

$$d(F_\psi(t, x_*), F_\psi(t, x^*)) \leqslant \lambda \|x_* - x^*\|$$

для любых $\psi \in \Psi$, $(t, x_*)$ и $(t, x^*)$ из $\Phi_\sigma$

Приведем определение аппроксимирующей системы множеств, ориентированное на приближенное вычисление множества $W^0$. Понятие аппроксимирующей системы множеств возникает при подмене непрерывной (по времени) схемы $u$-стабильной дискретной схемой. А именно промежуток $[t_0, \vartheta]$ подменяется разбиением $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_n = \vartheta\}$, а множества $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$, $\psi \in \Psi$ из определения 2.1 подменяются множествами $x_* + (t^* - t_*)F_\psi(t_*, x_*)$, $\psi \in \Psi$. Далее, определения 2.1 и 2.2 соответствующим образом трансформируются в определения, предназначенные для работы с дискретным временем $t_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1, N$.

Итак, полагаем

$$\widetilde{X}_\psi(t^*; t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*)F_\psi(t_*, x_*),$$
$$\widetilde{X}_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X^* \bigcap \widetilde{X}_\psi(t_*; t_*, x_*) \neq \varnothing\},$$

где $(t_*, t^*) \in \Delta,\ x_* \in \mathbb{R}^m,\ X^* \subset \mathbb{R}^m,\ \psi \in \Psi$.

**Определение 3.1.** *Аппроксимирующим оператором стабильного поглощения* $\pi^\varepsilon$ $(\varepsilon \in (0, \sigma))$ *в задаче о сближении называется отображение* $(t_*, t^*, X^*) \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$, $(t_*, t^*, X^*) \in \Delta \times 2^{\mathbb{R}^m}$*, заданное соотношением*

$$\pi^\varepsilon(t_*, t^*, X^*) = \Phi(t_*)_\varepsilon \bigcap \left( \bigcap_{\psi \in \Psi} \widetilde{X}_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) \right).$$

Обозначим

$$\omega^*(\delta) = \sup_{\substack{(t_*, x_*), (t^*, x^*) \in \Phi_\sigma, \\ |\, t_* - t^* \,| + \|x_* - x^*\| \leqslant \delta}} \omega^*(|\, t_* - t^* \,| + \|x_* - x^*\|), \tag{3.1}$$

$$\omega(\delta) = \delta\omega^*((1 + K)\delta),\ \delta > 0.$$

Из определений $\omega^*(\delta)$ и $\omega(\delta)$ следует, что они монотонно убывают к нулю при $\delta \downarrow 0$, причем $\lim\limits_{\delta \downarrow 0} \frac{\omega^*(\delta)}{\delta} = 0$.

Зададим последовательность таких разбиений $\Gamma_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{N(n)} = \vartheta\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$, что диаметры $\Delta^{(n)} = \max\{\Delta_i :\ 0 \leqslant i \leqslant N(n) - 1\}$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ разбиений $\Gamma_n$ монотонно стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Отметим, что моменты $t_i$ разбиений $\Gamma_n$ свои для каждого разбиения $\Gamma_n$; однако, чтобы не усложнять обозначения, эту зависимость моментов $t_i$ от номера $n$ явно отражать не будем.

Каждому разбиению $\Gamma_n$ поставим в соответствие последовательность $\{\varepsilon_i\}$ чисел $\varepsilon_i = \omega(\Delta_{i-1}) + (1 + \lambda\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}$, $i = 1, 2, \ \ldots, N(n)$, $\varepsilon_0 = 0$.

Примем также, что разбиения $\Gamma_n$ выбраны настолько мелкими, что для любого $\Gamma_n$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leqslant i \leqslant N(n)-1} (1 + K)\Delta_i = (1 + K)\Delta^{(n)} \leqslant \sigma, \\ &\max_{0 \leqslant i \leqslant N(n)-1} \varepsilon_i \leqslant \sigma. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Поставим в соответствие каждому разбиению $\Gamma_n$ последовательность $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ множеств $\widetilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \mathbb{R}^m$, $t_i \in \Gamma_n$, заданную рекуррентными соотношениями, начиная от конечного момента $t_{N(n)} = \vartheta$ разбиения $\Gamma_n$.

**Определение 3.2.** *Полагаем* $\widetilde{W}^{(n)}(\vartheta) = M_{\varepsilon_{N(n)}}$,

$$\widetilde{W}^{(n)}(t_i) = \ \mathcal{T}^{\varepsilon_i}(t_i; t_{i+1}, \widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad i = N(n) - 1,\, N(n) - 2,\, \ldots, 1, 0.$$

Итак, последовательность $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ представляет собой попятно заданную последовательность множеств $\widetilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \mathbb{R}^m$. Определим предел этой последовательности, когда $\Delta^{(n)}$ – диаметр разбиения $\Gamma_n$ – стремится к нулю.

**Определение 3.3.** *Пусть* $\Omega^0$ *– множество всех точек* $(t_*, x_*) \in \Phi$*, для каждой из которых найдется такая последовательность*

$$\{(\tau_n, x_n) :\ \tau_n = t_n(t_*),\ x_n \in \widetilde{W}^{(n)}(\tau_n)\}, \tag{3.3}$$

что $(t_*, x_*) = \lim\limits_{n \to \infty} (\tau_n, x_n)$; здесь

$$t_n(t_*) = \begin{cases} t_* & \text{при} \quad t_* = \vartheta, \\ \min\limits_{t_i \in \Gamma_n,\, t_i > t_*} t_i & \text{при} \quad t_* < \vartheta. \end{cases}$$

Так как выполняется равенство $\widetilde{W}^{(n)}(\vartheta) = M_{\varepsilon_{N(n)}}$, то сечение $\Omega^0(\vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^m : (\vartheta, x) \in \Omega^0\}$ множества $\Omega^0$ определяется равенством $\Omega^0(\vartheta) = M$. Значит, $\Omega^0 \neq \varnothing$. Кроме того, из определения 3.3 следует, что $\Omega^0 \subset \Phi$.

**Теорема 3.1.** $\Omega^0 = W^0$.

**Доказательство.** Докажем сначала включение $\Omega^0 \subset W^0$. Для этого покажем, что $\Omega^0$ – $u$-стабильный мост. В самом деле, выполняется включение $\Omega^0(\vartheta) \subset M$, следующее из равенства $\Omega^0(\vartheta) = M$. Докажем теперь, что $\Omega^0(t_*) \subset \ \mathcal{T}(t_*; t^*, \Omega^0(t^*))$ для любых $(t_*, t^*) \in \Delta$. Зафиксируем для этого произвольную точку $(t_*, x_*) \in \Omega^0,\ t_* < \vartheta$. Найдется последовательность (3.3) такая, что $(t_*, x_*) = \lim\limits_{n\to\infty}(\tau_n, x_n)$.

Рассмотрим произвольный номер $n$ и отвечающий ему отрезок $[\tau_n, \vartheta]$. Из включения $x_n \in \widetilde{W}^{(n)}(\tau_n)$ следует, что существует такая абсолютно непрерывная на $[\tau_n, \vartheta]$ вектор-функция $\tilde{x}^{(n)}(t)$, что для любого $\psi \in \Psi$ верно

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{x}}^{(n)}(t) \in F_\psi(t_i, \tilde{x}^{(n)}(t_i)),\ t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [\tau_n, \vartheta), \\ &\tilde{x}^{(n)}(\tau_n) = x_n,\ \tilde{x}^{(n)}(t_i) \in \widetilde{W}^{(n)}(t_i),\ \tau_n < t_i < \vartheta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Введем в рассмотрение функции, являющиеся непрерывными продолжениями на отрезок $[t_*, \vartheta]$ функций $\tilde{x}^{(n)}(t),\ t \in [\tau_n, \vartheta]$:

$$\tilde{y}^{(n)}(t) = \begin{cases} \tilde{x}^{(n)}(\tau_n),\ t_* \leqslant t \leqslant \tau_n, \\ \tilde{x}^{(n)}(t),\ \tau_n \leqslant t \leqslant \vartheta, \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \dots\ .$$

Так как последовательность $\{\tilde{y}^{(n)}(t)\}$ равноограниченна и равностепенно непрерывна на $[t_*, \vartheta]$, из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что это сама последовательность $\{\tilde{y}^{(n)}(t)\}$ равномерно сходится на $[t_*, \vartheta]$. Полагая $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}^{(n)}(t),\ t \in [t_*, \vartheta]$, получаем

$$\begin{aligned} &x(t_*) = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}^{(n)}(t_*) = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}^{(n)}(\tau_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_*, \\ &x(t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}^{(n)}(t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}^{(n)}(t),\ t \in (t_*, \vartheta]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.3)–(3.5) следует, что вектор-функция $x(t),\ t \in [t_*, \vartheta]$, удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{x} \in F_\psi(t, x) \text{ почти всюду на } [t_*, \vartheta] \tag{3.6}$$

и включению

$$(t, x(t)) \in \Omega^0,\ t \in [t_*, \vartheta]. \tag{3.7}$$

Включение (3.6) доказывается стандартным образом (см., например, [15]). Докажем включение (3.7). Зафиксируем произвольный момент $t \in [t_*, \vartheta]$. Для этого момента имеет место равенство $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}^{(n)}(t)$. По построению функции $\tilde{y}^{(n)}(t),\ t \in [t_*, \vartheta]$, выполняется включение $\tilde{y}^{(n)}(t_n(t)) = \tilde{x}^{(n)}(t_n(t)) \in \in \widetilde{W}^{(n)}(t_n(t))$, где момент $t_n(t)$ определен выше.

Полагаем $\eta_n = t_n(t)$ и $y_n = \tilde{x}^{(n)}(\eta_n) = \tilde{x}^{(n)}(t_n(t))$. Тогда

$$\|(t, x(t)) - (\eta_n, y_n)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(t, x(t)) - (t, \tilde{y}^{(n)}(t))\| + \|(t, \tilde{y}^{(n)}(t)) - (t_n(t), \tilde{y}^{(n)}(t_n(t)))\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x(t) - \tilde{y}^{(n)}(t)\| + (1 + K)\Delta^{(n)}.$$

Принимая во внимание это неравенство и предельные соотношения

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}^{(n)}(t),\ \lim_{n\to\infty} \Delta^{(n)} = 0,$$

получаем, что

$$(t, x(t)) = \lim_{n\to\infty} (\eta_n, y_n),\ \eta_n = t_n(t),\ y_n \in \widetilde{W}^{(n)}(\eta_n).$$

Тем самым включение (3.7) доказано. Итак, показано, что для любой точки $(t_*, x_*) \in \Omega^0,\ t_* < \vartheta$ и любого $\psi \in \Psi$ найдется решение $x(t),\ t \in [t_*, \vartheta]$ дифференциального включения (3.6), удовлетворяющее (3.7). Из (3.6) и (3.7) следует $\Omega^0(t_*) \in\ \mathcal{T}(t_*; t^*, \Omega^0(t^*))$ для любых $(t_*, t^*) \in \Delta$. Значит, $\Omega^0$ – $u$-стабильный мост в рассматриваемой задаче о сближении и $\Omega^0 \subset W^0$.

Докажем обратное включение $W^0 \subset \Omega^0$.

Рассмотрим разбиение $\Gamma_n$ отрезка $[t_0, \vartheta]$ и все непустые сечения $W^0(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$, моста $W^0$. Обозначим $T_n = \{t_i \in \Gamma_n : W^0(t_i) \neq \varnothing\}$. Множество $T_n$ непусто, так как $W^0(t_N) = M \neq \varnothing$. Кроме того, множество $T_n$ обладает свойством: если $t_i \in T_n$, то $t_{i+1} \in T_n$.

Согласно определениям 2.1, 2.2 справедливы включения

$$W^0(t_i) \subset \Phi(t_i) \bigcap X_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, W^0(t_{i+1})),\ t_i \in T_n, \tag{3.8}$$

для любого $\psi \in \Psi$.

Выберем произвольный момент $t_i \in T_n,\ t_i < \vartheta$, и рассмотрим множества $W^0(t_i)$ и $W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$; числа $\omega(\Delta_i)$ определены выше.

Справедливо включение

$$W^0(t_i) \subset \widetilde{X}_\psi^{-1}(t_i, t_{i+1}, W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}),\ t_i \in T_n. \tag{3.9}$$

Покажем это. Пусть $x(t_i) \in W^0(t_i)$. Рассмотрим произвольное решение $x(t),\ t \geqslant t_i$, дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t, x),\ t \geqslant t_i$, с начальным значением $x(t_i)$. Так как $(t_i, x(t_i)) \in W^0 \subset int\,\Phi_\sigma$, то при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$, достаточно близких к $t_i$, верно включение $(t, x(t)) \in int\,\Phi_\sigma$.

Покажем, что при сделанных относительно $\Gamma_n$ предположениях верно включение $(t, x(t)) \in int\,\Phi_\sigma$ при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Допустим противное: существует момент $t^\natural \in [t_i, t_{i+1})$, в который точка $(t, x(t))$ выходит на границу $\partial\Phi_\sigma$ множества $\Phi_\sigma$. Не умаляя общности рассуждений, можем считать, что $t^\natural$ – момент первого выхода точки $(t, x(t))$, $t \geqslant t_i$, на границу $\partial\Phi_\sigma$. То есть $(t, x(t)) \in int\,\Phi_\sigma$ при $t \in [t_i, t^\natural)$ и $(t^\natural, x(t^\natural)) \in \partial\Phi_\sigma$. Отсюда следует, что почти всюду на $[t_i, t^\natural]$ выполняется равенство $\dot{x}(t) = f(t)$, где $\|f(t)\| \leqslant K$. Тогда точка $(t^\natural, x(t^\natural))$ удовлетворяет неравенству

$$\|(t^\natural, x(t^\natural)) - (t_i, x(t_i))\| \leqslant (t^\natural - t_i) + K(t^\natural - t_i) < (1 + K)\Delta_i < \sigma.$$

Отсюда и из включения $(t_i, x(t_i)) \in \Phi$ следует включение $(t^\natural, x(t^\natural)) \in int\,\Phi_\sigma$, противоречащее определению момента $t^\natural$. Вместе с тем установлено, что $(t, x(t)) \in int\,\Phi_\sigma \subset \Phi_\sigma$ при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Для выбранной точки $x(t_i) \in W^0(t_i)$ рассмотрим $X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))$. Каждая точка $x(t_{i+1}) \in X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))$ есть значение в момент $t_{i+1}$ некоторого решения $x(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t, x)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ с начальным значением $x(t_i)$. Справедливо равенство

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt,\ t \in [t_i, t_{i+1}],$$

где $f(t)$ – интегрируемая по Лебегу функция, удовлетворяющая включению $f(t) \in F_\psi(t, x(t))$ почти всюду на $[t_i, t_{i+1}]$.

Принимая во внимание определение функции $\omega^*(\Delta)$, а также включения $(t_i, x(t_i)) \in \Phi_\sigma$, $(t, x(t)) \in \Phi_\sigma$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, получаем

$$\begin{aligned} d(F_\psi(t, x(t)), F_\psi(t_i, x(t_i))) \leqslant \omega^*(\mid t - t_i \mid + \|x(t) - x(t_i)\|) \leqslant \\ \leqslant \omega^*((1 + K)\Delta_i),\ t \in [t_i, t_{i+1}]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Значит, справедливо включение $f(t) \in F_\psi(t_i, x(t_i))_{\omega^*((1+K)\Delta_i)}$, из которого следует включение

$$\frac{1}{\Delta_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \in F_\psi(t_i, x(t_i))_{\omega^*((1+K)\Delta_i)}. \tag{3.11}$$

Из (3.11) следует включение

$$x(t_{i+1}) \in \widetilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))_{\omega(\Delta_i)}. \tag{3.12}$$

Учитывая, что соотношение (3.12) получено для произвольной точки $x(t_{i+1}) \in X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))$, заключаем, что

$$X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \subset \widetilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))_{\omega(\Delta_i)}.$$

Из включения $x(t_i) \in W^0(t_i)$ следует, что

$$W^0(t_{i+1}) \bigcap X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \neq \varnothing$$

и, значит,

$$W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \bigcap \widetilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \neq \varnothing. \tag{3.13}$$

Поскольку момент $t_i \in T_n$ и точка $x(t_i) \in W^0(t_i)$ выбраны произвольно, то из (3.13) следует включение (3.9).

Далее, зададим систему $\{\widehat{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in T_n\}$ множеств $\widehat{W}^{(n)}(t_i)$ равенствами $\widehat{W}^{(n)}(t_i) = W^0(t_i)_{\varepsilon_i}$ (числа $\varepsilon_i$ определены выше в разд. 2). По определению множеств $\widehat{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in T_n$, выполняются включения $W^0(t_i) \subset \widehat{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in T_n$. Для любого $\psi \in \Psi$ справедливы включения

$$\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \widetilde{X}_\psi^{-1}(t_i, t_{i+1}, \widehat{W}^{(n)}(t_{i+1})),\ t_i \in T_n. \tag{3.14}$$

Докажем это. Пусть $x(t_i) \in \widehat{W}^{(n)}(t_i)$ и $x^*(t_i)$ – ближайшая точка на $W^0(t_i)$ к точке $x(t_i)$. Справедливо неравенство $\|x(t_i) - x^*(t_i)\| \leqslant \varepsilon_i$. Из включений $x^*(t_i) \in W^0(t_i)$ и (3.9) следует соотношение

$$W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \bigcap \widetilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x^*(t_i)) \neq \varnothing. \tag{3.15}$$

Тогда существует точка

$$x^*(t_{i+1}) = x^*(t_i) + \Delta_i f^*(t_i), \quad f^*(t_i) \in F_\psi(t_i, x^*(t_i)), \tag{3.16}$$

содержащаяся в $W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$. Так как $(t_i, x^*(t_i)) \in W^0 \subset \Phi_\sigma$ и $(t_i, x(t_i)) \in$ $\in W^0_{\varepsilon_i} \subset W^0_\sigma \subset \Phi_\sigma$, то, согласно условию A.4, выполняется неравенство

$$d(F_\psi(t_i, x(t_i)), F_\psi(t_i, x^*(t_i))) \leqslant \lambda \|x(t_i) - x^*(t_i)\|.$$

Принимая его во внимание, выберем вектор $f(t_i) \in F_\psi(t_i, x(t_i))$, удовлетворяющий неравенству $\|f(t_i) - f^*(t_i)\| \leqslant \lambda \|x(t_i) - x^*(t_i)\| \leqslant \varepsilon_i$. Тогда оказывается, что точка $x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta_i f(t_i)$ отстоит от точки (3.15) не более чем на величину

$$\|x(t_i) - x^*(t_i)\| + \Delta_i \|f(t_i) - f^*(t_i)\| \leqslant (1 + \lambda\Delta_i)\varepsilon_i.$$

Значит, $x(t_{i+1}) \in \widehat{W}^{(n)}(t_{i+1})$. Таким образом, показано, что для любого $\psi \in \Psi$ и любых $t_i \in T_n$ и $x(t_i) \in \widehat{W}^{(n)}(t_i)$ выполняется соотношение

$$\widetilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \bigcap \widehat{W}^{(n)}(t_{i+1}) \neq \varnothing,$$

отсюда следует включение (3.14).

Справедливы также включения

$$\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_i),\ t_i \in T_n. \tag{3.17}$$

Докажем (3.17) по индукции. В самом деле, выполняются соотношения

$$\widehat{W}^{(n)}(t_i) = W^0(t_i)_{\varepsilon_i} \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i},\ t_i \in T_n, \tag{3.18}$$

$$\widehat{W}^{(n)}(t_{N(n)}) = W^0(t_{N(n)})_{\varepsilon_{N(n)}} = M_{\varepsilon_{N(n)}} = \widetilde{W}(t_{N(n)}). \tag{3.19}$$

Следовательно, для $i = N(n)$ включение $\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_i)$ выполняется.

Докажем, что включение (3.17) выполняется при всех остальных $i$, для которых $t_i \in T_n$. Для этого предположим, что $t_i \in T_n$, $i \leqslant N(n) - 1$, и для момента $t_{i+1} \in T_n$ имеет место включение

$$\widehat{W}^{(n)}(t_{i+1}) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1}). \tag{3.20}$$

Докажем, что $\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_i)$. В самом деле, из (3.14) и (3.18) получаем

$$\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \bigcap \widetilde{X}_{\psi}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widehat{W}^{(n)}(t_{i+1})),\ \psi \in \Psi,$$

а из (3.20) –

$$\Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \bigcap \widetilde{X}_{\psi}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widehat{W}^{(n)}(t_{i+1})) \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \bigcap \widetilde{X}_{\psi}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1})),\ \psi \in \Psi.$$

Итак, $\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_i)$. Тем самым соотношения (3.17) доказаны.

Применим (3.17) к доказательству включения $W^0 \subset \Omega^0$.

В случае, когда $t_* = \vartheta$, верны равенства $W^0(t_*) = M$, $\Omega^0(t_*) = M$ и значит, $W^0(t_*) = \Omega^0(t_*)$. Пусть $t_* < \vartheta$. Выберем произвольную точку $(t_*, x_*) \in W^0$. Верны неравенства $t_* \leqslant t_n(t_*) \leqslant t_* + \Delta^{(n)}$, $n = 1, 2, \ \ldots$ . Так как $(t_*, x_*) \in W^0$, то для любого $\psi \in \Psi$ существует решение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, дифференциального включения $\dot{x} \in F_{\psi}(t, x)$, $x(t_*) = x_*$, удовлетворяющее включению $(t, x(t)) \in W^0$, $t \in [t_*, \vartheta]$. Отсюда следует включение

$$x(t_n(t_*)) \in W^0(t_n(t_*)) \subset \widehat{W}^{(n)}(t_n(t_*)) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_n(t_*)).$$

Значит, при каждом $n$ найдется такая точка $x(t_n(t_*)) \in \widetilde{W}^{(n)}(t_n(t_*))$, что

$$\|x(t_n(t_*)) - x_*\| \leqslant K(t_n(t_*) - t_*).$$

Принимая во внимание равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(t_n(t_*) - t_*) = 0$, получаем, что последовательность $\{(t_n(t_*)), x(t_n(t_*)))\}$ точек из $W^0$ удовлетворяет соотношению $(t_*, x_*) = \lim\limits_{n\to\infty}(t_n(t_*), x(t_n(t_*)))$, и, значит, $(t_*, x_*) \in \Omega^0$.

Показано, что $W^0(t_*) \subset \Omega^0(t_*)$, $t_* < \vartheta$.

Из соотношений $W^0(\vartheta) \subset \Omega^0(\vartheta)$ и $W^0(t_*) \subset \Omega^0(t_*)$, $t_* < \vartheta$, следует включение $W^0 \subset \Omega^0$. Из включений $\Omega^0 \subset W^0$ и $W^0 \subset \Omega^0$ следует равенство $\Omega^0 = W^0$. Теорема 3.1 доказана.

**Литература**


1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Тр. МИРАН. 1995. Т. 211. С. 304–315.
3. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
4. Красовский Н. Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, №5. С. 1260–1263.
5. Красовский Н. Н. Унификация дифференциальных игр // Игровые задачи управления: Тр. Ин-та математики и механики. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. Вып. 24. С. 32–45.
6. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. I // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, №6. С. 1278–1280.
7. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112, №3. С. 307–330.
8. Никольский М. С. Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина // Там же. 1981. Т. 116, №1. С. 136–144.
9. Петров Н. Н. Существование значения игры преследования // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, вып. 5. С. 827–839.
10. Алексейчик М. И. Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры // Мат. анализ и его приложения. Ростов н/Д: Рост. гос. ун-т, 1975. Т. 7. С. 191–199.
11. Ушаков В. Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. №4. С. 29–36.
12. Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. О приближенном построении решений в игровых задачах управления // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 3. С. 413–421.
13. Пацко В. С., Турова В. Л. Численное решение дифференциальных игр на плоскости: Препринт. Екатеринбург: УрО РАН, 1995.
14. Заварии А. Б., Ушаков В. Н. О выделении ядра выживаемости для дифференциального включения // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 5. С. 831–842.
15. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.


*Статья поступила 11.09.2002 г.*